METODE PEMISAH VARIABEL: PERSAMAAN LAPLACE

M. Jamhuri

April 1, 2013

- Salah satu metode untuk menyelesaikan persamaan Laplace adalah dengan metode pemisahan variabel.
- Misalkan diberikan persamaan laplace 2D pada domain terbatas

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

pada $0 < x < a$, dan $0 < y < b$, dengan kondisi batas

$$u(0, y) = 0, \qquad u_x(a, y) = 0 \tag{2}$$

dan

$$u_y(x, 0) + u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = g(x)\,. \tag{3}$$

- Misalkan $u(x, y) = X(x)\,Y(y)$, kemudian substitusikan pada (1), diperoleh

$$\begin{aligned} X''Y + XY'' &= 0 \\ X''Y &= -XY'' \\ \frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} \end{aligned} \tag{4}$$

- Ruas kiri dari persamaan (4) hanya bergantung pada x saja, sedangkan ruas kanan hanya bergantung pada y saja. Persamaan tersebut hanya mungkin dipenuhi jika keduanya merupakan konstanta. Misalkan konstanta itu λ, maka

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \lambda \tag{5}$$

- Persamaan (5) dapat dituliskan secara terpisah sebagai

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{6}$$

dan

$$Y'' - \lambda Y = 0 \tag{7}$$

- Tuliskan kondisi batas (2) dan (3) kita tuliskan kedalam bentuk variabel terpisah, yaitu

$$u(0,y) = X(0)\,Y(y) = 0 \qquad u_x(a,y) = X''(a)\,Y(y) = 0 \tag{8}$$

dan

$$u_y(x,0) + u(x,0) = X(x)\,Y'(0) + X(x)\,Y(0) = 0 \tag{9}$$

$$u(x,b) = X(x)\,Y(b) = g(x) \tag{10}$$

- Jika kita mislkan$\lambda = \beta^2$, maka persamaan (6) menjadi

$$\begin{aligned} X'' + \beta^2 X &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dx} + \beta^2\right) X &= 0 \\ \left(\frac{d}{dx} + i\beta\right)\left(\frac{d}{dx} - i\beta\right) X &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

- Misalkan

$$\left(\frac{d}{dx} - i\beta\right) X = A \tag{12}$$

dan

$$\left(\frac{d}{dx} + i\beta\right) A = 0 \tag{13}$$

- Selesaikan (13) terlebih dahulu, yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dx} + i\beta A &= 0 \\
\frac{dA}{dx} &= -i\beta A \\
\frac{dA}{A} &= -i\beta dx \\
\int \frac{1}{A} dA &= -\int i\beta dx \\
\log A &= -i\beta x + c_1 \\
A &= c_1 e^{-i\beta x} \qquad (14)
\end{aligned}$$

- Jika (14) kita substitusikan pada (12), diperoleh

$$\frac{dX}{dx} - i\beta X = c_1 e^{-i\beta x} \tag{15}$$

- Untuk menyelesaikan (15), kita gunakan faktor integrasi

$$I = e^{\int(-i\beta)dx} = e^{-i\beta x} \tag{16}$$

- Kalikan kedua ruas dari persamaan (15) dengan faktor integrasi (16), yaitu

$$\begin{aligned} e^{-i\beta x}\frac{dX}{dx} - i\beta e^{-i\beta x}X &= c_1 e^{-2i\beta x} \\ \frac{d}{dx}\left(e^{-i\beta x}X\right) &= c_1 e^{-2i\beta x} \end{aligned} \tag{17}$$

- Integralkan kedua sisi dari persamaan (17), yaitu

$$\begin{aligned} \int d\left(e^{-i\beta x}X\right) &= c_1 \int e^{-2i\beta x}dx \\ e^{-i\beta x}X &= c_1\left[-\frac{1}{2i\beta}e^{-2i\beta x} + c_2\right] \\ e^{-i\beta x}X &= \left(-\frac{c_1}{2i\beta}\right)e^{-2i\beta x} + c_1c_2 \\ X &= \left(-\frac{c_1}{2i\beta}\right)e^{-i\beta x} + (c_1c_2)\,e^{i\beta x} \end{aligned} \tag{18}$$

- Misalkan $-\frac{c_1}{2i\beta} = k_1$, dan $c_1c_2 = k_2$, maka persamaan (18) menjadi

$$X = k_1 e^{-i\beta x} + k_2 e^{i\beta x} \tag{19}$$

- Jika (19) kita tuliskan dalam bentuk sinusoidal, maka

$$\begin{aligned} X &= k_1\left[\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right] + k_2\left[\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right] \\ &= \left[k_1 + k_2\right]\cos(\beta x) + \left[-ik_1 + ik_2\right]\sin(\beta x) \\ X(x) &= A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \qquad (20) \end{aligned}$$

- Gunakan kondisi batas (8), maka

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ A\cos 0 + B\sin 0 &= 0 \\ A &= 0 \end{aligned}$$

sehingga (20) menjadi

$$X(x) = B\sin(\beta x) \qquad (21)$$

dan

$$\begin{aligned} X'(a) &= 0 \\ B\cos(\beta a) &= 0 \\ \beta a &= \arccos 0 \\ \beta a &= \frac{(2n+1)\pi}{2}, \qquad \{n = 0, 1, 2, \ldots\} \\ \beta &= \left(\frac{2n+1}{2a}\right)\pi \qquad (22) \end{aligned}$$

- karena $\lambda = \beta^2$, maka

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2a}\right)^2 \pi^2 \qquad (23)$$

- λ_n disebut nilai eigen, sedangkan fungsi eigennya adalah

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right) \tag{24}$$

- Selanjutnya kita selesaikan $Y(y)$ dari persamaan (7), yaitu

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2}Y - \lambda Y &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dy^2} - \beta^2\right)Y &= 0 \\ \left(\frac{d}{dy} + \beta\right)\left(\frac{d}{dy} - \beta\right)Y &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

- Misalkan

$$\left(\frac{d}{dy} - \beta\right)Y = A \tag{26}$$

dan

$$\left(\frac{d}{dy} + \beta\right)A = 0 \tag{27}$$

- Solusi dari (27) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dy} &= -\beta A \\ \frac{dA}{A} &= -\beta dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{A} dA &= -\int \beta dy \\
\log A &= -\beta y + c_1 \\
A &= c_1 e^{-\beta y} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

- Substitusikan (28) pada (26), yaitu

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dy} - \beta\right) Y &= A \\
\frac{dY}{dy} - \beta Y &= c_1 e^{-\beta y} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

- Faktor integrasi untuk ODE (29) diatas adalah

$$
I = e^{\int -\beta dy} = e^{-\beta y} \qquad (30)
$$

- Kalikan ruas kiri dan ruas kanan dari (29) dengan (30), diperoleh

$$
\begin{aligned}
e^{-\beta y} \frac{dY}{dy} - \beta e^{-\beta y} Y &= c_1 e^{-2\beta y} \\
\frac{d}{dy}\left(e^{-\beta y} Y\right) &= c_1 e^{-2\beta y} \\
\int d\left(e^{-\beta y} Y\right) &= c_1 \int e^{-2\beta y} dy \\
e^{-\beta y} Y &= c_1 \left[-\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta y} + c_2\right]
\end{aligned}
$$

- Next...

$$e^{-\beta y}Y = \left(-\frac{c_1}{2\beta}\right)e^{-2\beta y} + c_1c_2$$

$$Y = \left(-\frac{c_1}{2\beta}\right)e^{-\beta y} + (c_1c_2)\,e^{\beta y} \tag{31}$$

- Jika kita misalkan konstan-konstan $\left(-\frac{c_1}{2\beta}\right) = k_1$ dan $(c_1c_2) = k_2$, maka persamaan (31) diatas menjadi

$$Y = k_1e^{-\beta y} + k_2e^{\beta y} \tag{32}$$

- Karena

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \tag{33}$$

sehingga (32) sama dengan

$$Y_n(y) = A\cosh(\beta_n y) + B\sinh(\beta_n y) \tag{34}$$

- Berikutnya gunakan kondisi batas (9) pada (34), yaitu

$$Y'(0) + Y(0) = 0$$

karena

$$Y'(y) = -\beta_n A\sinh(\beta_n y) + \beta_n B\cosh(\beta_n y)$$

maka

$$Y'(0) = \beta_n B \qquad \text{dan} \qquad Y(0) = A$$

dan

$$\beta_n B + A = 0 \tag{35}$$

- atau

$$A = -\beta_n B \tag{36}$$

- Jika A kita substitusikan pada (34), diperoleh

$$Y_n = B\left[-\beta_n \cosh(\beta_n y) + \sinh(\beta_n y)\right] \tag{37}$$

- Selanjutnya solusi u dapat diperoleh dengan mensubstitusikan kembali (24) dan (37) pada pemisalan $u(x, y) = X(x)\, Y(y)$, yaitu

$$u_n(x, y) = B \sin(\beta_n x)\left(\beta_n \cosh(\beta_n y) - \sinh(\beta_n y)\right)$$

  atau

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\beta_n x)\left(\beta_n \cosh(\beta_n y) - \sinh(\beta_n y)\right) \tag{38}$$

- Notasi B_n adalah gabungan dari konstanta pada Y dan konstanta yang ada pada saat pembentukan kombinasi linier.
- konstanta B_n akan kita tentukan dengan menggunakan kondisi batas (10) yaitu pada saat $y = b$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\beta_n x)\left(\beta_n \cosh(\beta_n b) - \sinh(\beta_n b)\right) \tag{39}$$

  yang berlaku untuk $0 < x < a$.

- Selanjutnya dengan menggunakan deret Fourier kita peroleh

$$B_n = [\beta_n \cosh(\beta_n b) - \sinh(\beta_n b)]^{-1} \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin(\beta_n x)\, dx$$

- Diberikan persamaan Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

pada domain $D = \{(x, y) : 0 < x < 10, 0 < y < \pi\}$ dengan kondisi batas

$$u(0, y) = 0 \qquad \text{dan} \qquad u_x(10, y) = 0$$

dan

$$u_y(x, 0) + u(x, 0) = 0, \qquad \text{dan} \qquad u(x, \pi) = (x - 10)\sin \pi x \tag{40}$$

- Dengan menggunkan metode pemisahan variabel seperti yang dijelaskan sebelumnya, maka diperoleh solusi

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\beta_n x)\left(\beta_n \cosh(\beta_n y) - \sinh(\beta_n y)\right) \tag{41}$$

jika kondisi batas (40) disubstitusikan pada (41) diperoleh

$$(x - 10)\sin(\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\beta_n x)\left[\beta_n \cosh(\beta_n \pi) - \sinh(\beta_n \pi)\right]$$

dengan $\beta_n = \left(\frac{2n+1}{2a}\right)\pi$, dan dengan menggunakan deret Fourier diperoleh

$$B_n = \left[\beta_n \cosh(\beta_n \pi) - \sinh(\beta_n \pi)\right]^{-1} \frac{1}{5} \int_0^{10} (x - 10)\sin(\pi x)\sin(\beta_n x)\, dx \tag{42}$$

- Diketahui
$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{43}$$
pada domain $-h_1 < y < \eta(x,t)$,
$$\bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{yy} = 0 \tag{44}$$
pada domain $-h_2 < y < -h_1$, dan dengan kondisi batas
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \alpha \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}, \qquad \text{pada} \qquad y = -h_1$$
dan
$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} = 0, \qquad \text{pada} \qquad y = -h_2$$
- Misalkan $\phi(x,y,t) = S(x,t) F(y)$. jika diketahui
$$S(x,t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x,t) \tag{45}$$
maka
$$\phi(x,y,t) = \frac{ig}{\omega} \eta(x,t) F(y) \tag{46}$$
- Jika (46) kita substitusikan pada (43), diperoleh
$$\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2} F(y) + \eta(x,t) \frac{d^2}{dy^2} F(y) = 0 \tag{47}$$

- Persamaan (47) dapat kita tuliskan sebagai

$$-\frac{\eta_{xx}}{\eta} = \frac{F_{yy}}{F} = \lambda \tag{48}$$

- Persamaan (48) dapat dituliskan sebagai dua persamaan terpisah

$$\eta_{xx} + \lambda\eta = 0 \tag{49}$$

dan

$$F_{yy} - \lambda F = 0 \tag{50}$$

- Misalkan $\lambda = \beta^2$, maka dapat diperoleh solusi dari persamaan (50), yaitu

$$F(y) = Ae^{\beta y} + Be^{-\beta y} \tag{51}$$

- Jika digunakan $F(0) = 1$, maka

$$F(0) = A + B = 1$$
$$A = 1 - B$$

dan

$$\begin{aligned} F(y) &= (1 - B)e^{\beta y} + Be^{-\beta y} \\ F'(y) &= (1 - B)\beta e^{\beta y} - B\beta e^{-\beta y} \end{aligned}$$

dan untuk $F'(0) = \frac{\omega^2}{g}$,diperoleh

$$(1 - B)\beta - \beta B = \frac{\omega^2}{g} \tag{52}$$

- Next...

$$\begin{aligned} (1-2B)\,\beta &= \frac{\omega^2}{g} \\ \beta &= \frac{\omega^2}{(1-2B)\,g} \end{aligned}$$

- **versi yang lain**: Misalkan konstan A dan B kita tuliskan dalam bentuk konstan yang lain, yaitu

$$A = \frac{C_1 + C_2}{2} \qquad \text{maka} \qquad B = \frac{C_1 - C_2}{2}$$

dengan $C_1 \neq C_2$, maka

$$\begin{aligned} F(y) &= Ae^{\beta y} + Be^{-\beta y} \\ \vdots &= \left(\frac{C_1 + C_2}{2}\right) e^{\beta y} + \left(\frac{C_1 - C_2}{2}\right) e^{-\beta y} \\ \vdots &= \left[\frac{C_1}{2} e^{\beta y} + \frac{C_1}{2} e^{-\beta y}\right] + \left[\frac{C_2}{2} e^{\beta y} - \frac{C_2}{2} e^{-\beta y}\right] \\ \vdots &= C_1 \left(\frac{e^{\beta y} + e^{-\beta y}}{2}\right) + C_2 \left(\frac{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}{2}\right) \\ F(y) &= C_1 \cosh(\beta y) + C_2 \sinh(\beta y) \qquad (53) \end{aligned}$$

- DIketahui kondisi batas $F(0) = 1$, dan $F'(0) = \frac{\omega^2}{g}$ maka

$$\begin{aligned} F(0) &= 1 \\ C_1 &= 1 \end{aligned}$$

- maka
$$F\left(y\right)=\cosh\left(\beta y\right)+C_{2}\sinh\left(\beta y\right) \tag{54}$$
dan
$$F'\left(y\right)=\beta\sinh\left(\beta y\right)+C_{2}\beta\cosh\left(\beta y\right)$$
maka
$$\begin{aligned} C_{2}\beta &= \frac{\omega^{2}}{g} \\ C_{2} &= \frac{\omega^{2}}{g\beta} \end{aligned}$$
- Jika C_2 kita substitusikan pada (54), maka
$$F\left(y\right)=\cosh\left(\beta y\right)+\frac{\omega^{2}}{g\beta}\sinh\left(\beta y\right)$$
dan fungsi potensial
$$\phi\left(x,y,t\right)=\frac{ig}{\omega}\eta\left(x,t\right)\left[\cosh\left(\beta y\right)+\frac{\omega^{2}}{g\beta}\sinh\left(\beta y\right)\right] \tag{55}$$

- Dari syarat batas $\phi_y = 0$ pada $y = -h_2$, maka

$$\phi_y\left(x,y,t\right) = \frac{ig}{\omega}\eta\left(x,t\right)\left[\beta \sinh\left(\beta y\right) + \frac{\omega^2}{g}\cosh\left(\beta y\right)\right]$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{ig}{\omega}\eta\left(x,t\right)\left[\beta \sinh\left(-\beta h_2\right) + \frac{\omega^2}{g}\cosh\left(-\beta h_2\right)\right] &= 0 \\ -\beta \sinh\left(\beta h_2\right) + \frac{\omega^2}{g}\cosh\left(\beta h_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{g}\cosh\left(\beta h_2\right) &= \beta \sinh\left(\beta h_2\right) \\ \omega^2 &= g\beta\frac{\sinh\left(\beta h_2\right)}{\cosh\left(\beta h_2\right)} \end{aligned}$$

atau

$$\omega^2 = g\beta \tanh\left(\beta h_2\right) \tag{56}$$

- Perhatikan,

$$S_{xx} + \lambda S = 0 \tag{57}$$

- Jika $S(x,t) = \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)$, dan $\eta(x,t) = ae^{-i(kx-\omega t)}$maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S(x,t) &= \frac{ig}{\omega}\eta_{xx} \\ &= \frac{g}{\omega} ka(-ik)\, e^{-i(kx-\omega t)} \end{aligned}$$

- Maka

$$S_{xx} = -\frac{igk^2}{\omega}\eta(x,t) \tag{58}$$

- Jika kita gunakan (58) dan (45) pada (57), maka

$$\begin{aligned} -\frac{igk^2}{\omega}\eta(x,t) + \frac{ig}{\omega}\beta^2\eta(x,t) &= 0 \\ -k^2\eta + \beta^2\eta &= 0 \end{aligned}$$

$$\beta^2\eta = k^2\eta$$

sehingga $\beta = k$, dan persamaan (56) dapat kita tulis sebagai

$$\omega^2 = gk\tanh(kh_2)$$

atau

$$\omega = \sqrt{gk\tanh(kh_2)} \tag{59}$$

- Misalkan

$$\bar{\phi}(x,y,t) = S(x,t)\,G(y)$$

dimana $S(x,t)$ sama dengan (45), maka

$$\bar{\phi}(x,y,t) = \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\,G(y) \tag{60}$$

dengan fungsi tak diketahui G memenuhi

$$G'' - k^2 G = 0 \tag{61}$$

dengan kondisi

$$G(0) = 1, \qquad \text{dan} \qquad G'(0) = \frac{\omega^2}{g} \tag{62}$$

- Sama dengan solusi dari (50), maka solusi untuk (61) dan kondisi (62) adalah

$$G(y) = \cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gk}\sinh(ky)$$

- Now

$$\phi(x,y,t) = \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[\cosh(\beta y) + \frac{\omega^2}{g\beta}\sinh(\beta y)\right] \tag{63}$$

dan

$$\bar{\phi}(x,y,t) = \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[A\cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gk}B\sinh(ky)\right] \tag{64}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \alpha \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \qquad \text{pada} \qquad y = -h_1 \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,t) &= \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[k\sinh(ky) + \frac{\omega^2}{g}\cosh(ky)\right] \\
\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,-h_1,t) &= \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[-k\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{g}\cosh(kh_1)\right]
\end{aligned} \tag{66}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\bar{\phi}(x,-h_2,t) = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{\phi}(x,-h_2,t) = \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[Ak\sinh(-kh_2) + \frac{\omega^2}{g}B\cosh(-kh_2)\right] = 0$$

$$-Ak\sinh(kh_2) + \frac{\omega^2}{g}B\cosh(kh_2) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{g}B\cosh(kh_2) &= Ak\sinh(kh_2) \\
B &= \frac{Akg}{\omega^2}\tanh(kh_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\bar{\phi}(x,y,t) &= \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[Ak\sinh(ky)+\frac{\omega^2}{g}B\cosh(ky)\right] \\
&= \frac{ig}{\omega}\eta\left[Ak\sinh(ky)+\frac{\omega^2}{g}\frac{kg}{\omega^2}A\tanh(kh_2)\cosh(ky)\right] \\
&= \frac{ig}{\omega}\eta\left[Ak\sinh(ky)+Ak\tanh(kh_2)\cosh(ky)\right] \\
&= \frac{igAk}{\omega}\eta\left[\sinh(ky)+\tanh(kh_2)\cosh(ky)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\bar{\phi}(x,-h_1,t) &= \frac{igAk}{\omega}\eta\left[\sinh(-kh_1)+\tanh(kh_2)\cosh(-kh_1)\right] \\
&= \frac{igAk}{\omega}\eta\left[-\sinh(kh_1)+\tanh(kh_2)\cosh(kh_1)\right] \qquad (67)
\end{aligned}$$

Selanjutnya kita gunakan (67) dan (66) pada (65), yaitu

$$-k\sinh(kh_1)+\frac{\omega^2}{g}\cosh(kh_1)=\alpha Ak\left[-\sinh(kh_1)+\tanh(kh_2)\cosh(kh_1)\right]$$

$$\begin{aligned}
\alpha kA &= \frac{-k\sinh(kh_1)+\frac{\omega^2}{g}\cosh(kh_1)}{-\sinh(kh_1)+\tanh(kh_2)\cosh(kh_1)} \\
A &= \frac{-k\sinh(kh_1)+\frac{\omega^2}{g}\cosh(kh_1)}{\alpha k\left[-\sinh(kh_1)+\tanh(kh_2)\cosh(kh_1)\right]} \qquad (68)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-\sinh(kh_1)\cosh(kh_2)}{\cosh(kh_2)} + \frac{\sinh(kh_2)\cosh(kh_1)}{\cosh(kh_2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sinh([h_2 - h_1]\,k)}{\cosh(kh_2)}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} A &= \left[-k\sinh(kh_1) + \frac{\omega^2}{g}\cosh(kh_1)\right]\frac{\cosh(kh_2)}{\alpha k\sinh([h_2 - h_1]\,k)} \\ &= \frac{-k\sinh(kh_1)\cosh(kh_2) + \frac{\omega^2}{g}\cosh(kh_1)\cosh(kh_2)}{\alpha k\sinh([h_2 - h_1]\,k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh([h_2 - h_1]\,k) &= \cosh(h_2k)\cosh(h_1k) - \sinh(h_2k)\sinh(h_1k) \\ \cosh(h_2k)\cosh(h_1k) &= \cosh([h_2 - h_1]\,k) + \sinh(h_2k)\sinh(h_1k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh([h_2 - h_1]\,k) &= \sinh(h_2k)\cosh(h_1k) - \sinh(h_1k)\cosh(h_2k) \\ \sinh(h_1k)\cosh(h_2k) &= \sinh(h_2k)\cosh(h_1k) - \sinh([h_2 - h_1]\,k) \end{aligned}$$

$$A = \frac{-k\sinh(kh_1)\cosh(kh_2) + \frac{\omega^2}{g}\left[\cosh([h_2 - h_1]k) + \sinh(kh_1)\sinh(kh_2)\right]}{\alpha k \sinh([h_2 - h_1]k)}$$

$$\Leftrightarrow \quad -k\sinh(kh_1)\cosh(kh_2) + \frac{\omega^2}{g}\sinh(kh_1)\sinh(kh_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad -k\left[\sinh(h_2 k)\cosh(h_1 k) - \sinh([h_2 - h_1]k)\right] + \frac{\omega^2}{g}\sinh(kh_1)\sinh(kh_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(-k\cosh(h_1 k) + \frac{\omega^2}{g}\sinh(kh_1)\right)\sinh(kh_2) + k\sinh([h_2 - h_1]k)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,-h_1,t) = \alpha\frac{\partial}{\partial t}\bar{\phi}(x,-h_1,t) + \omega f\bar{\phi}(x,-h_1,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,0,t) = -g\eta(x,t)$$

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,t) &= \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[\cosh(\beta y) + \frac{\omega^2}{g\beta}\sinh(\beta y)\right] \\
\bar{\phi}(x,y,t) &= \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[A\cosh(ky) + \frac{\omega^2}{gk}\left[\frac{Akg}{\omega^2}\tanh(kh_2)\right]\sinh(ky)\right] \\
&= \frac{ig}{\omega}\eta(x,t)\left[A\cosh(ky) + A\tanh(kh_2)\sinh(ky)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,y,t) &= \frac{ig}{\omega}\eta_t(x,t)\left[\cosh(\beta y) + \frac{\omega^2}{g\beta}\sinh(\beta y)\right] \\
\frac{\partial}{\partial t}\bar{\phi}(x,y,t) &= \frac{ig}{\omega}\eta_t(x,t)\left[A\cosh(ky) + A\tanh(kh_2)\sinh(ky)\right]
\end{aligned}$$