Regresi Nonlinier
(Pertemuan 5)

Mohammad Jamhuri

UIN Malang

September 23, 2013

- Misalkan

$$f(x) = a\left(1 - e^{-bx}\right) + \epsilon \tag{1}$$

dengan ϵ error, maka

$$\epsilon_i \;=\; y_i - a + ae^{-bx_i}$$

dan

$$\epsilon_i^2 = \left(y_i - a + ae^{-bx_i}\right)^2$$

- Jumlah ϵ_i^2 untuk $i = 1, \ldots, m$ adalah

$$\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - a + ae^{-bx_i}\right)^2 \tag{2}$$

- Misalkan

$$\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i^2 = \Phi$$

maka persamaan (2) dapat dituliskan sebagai

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - a + ae^{-bx_i} \right)^2 \tag{3}$$

- Untuk meminimumkan error turunkan persamaan (3) terhadap a_0 dan a_1 yaitu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - a + ae^{-bx_i} \right) \left(1 - e^{-bx_i} \right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - a + ae^{-bx_i} \right) \left(ax_i e^{-bx_i} \right) \tag{5}$$

- Tulis persamaan (4) dan (5) sebagai

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - a + ae^{-bx_i}\right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m}\left(y_i e^{-bx_i} - ae^{-bx_i} + ae^{-2bx_i}\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
0 = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i a x_i e^{-bx_i} - a^2 x_i e^{-bx_i} + a^2 x_i e^{-2bx_i}\right) \tag{7}
$$

- Ekspan persamaan (6) dan (7) diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum y_i - \sum a + \sum ae^{-bx_i} - \sum y_i e^{-bx_i} \\
&\quad + \sum ae^{-bx_i} - \sum ae^{-2bx_i}
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
0 = \sum a x_i y_i e^{-bx_i} - \sum a^2 x_i e^{-bx_i} + \sum a^2 x_i e^{-2bx_i} \tag{9}
$$

- Bagaimana cara menyelesaikan a dan b pada persamaan (8) dan (9)?
- Apakah metode Newton-Raphson dapat diterapkan dalam masalah ini?

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

- Misalkan

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum y_i - \sum a + \sum ae^{-bx_i} - \sum y_i e^{-bx_i} \\ &\quad + \sum ae^{-bx_i} - \sum ae^{-2bx_i} \\ f_2 &= \sum ax_i y_i e^{-bx_i} - \sum a^2 x_i e^{-bx_i} + \sum a^2 x_i e^{-2bx_i} \end{aligned}$$

- Bisakah kita mencari

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f_1}{\partial b}$$

- Misalkan bisa..!
- Selanjutnya, mudahkah?

- Misalkan diberikan model nonlinier

$$f(x) = a\left(1 - e^{-bx}\right) + \epsilon \tag{10}$$

- Hubungan antara data dan model dapat ditulis sebagai

$$y_i = f(x_i) + \epsilon_i \tag{11}$$

- Ekspansi persamaan (10) dengan deret Taylor

$$f(x_i)_{j+1} = f(x_i)_j + \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f(x_i)}{\partial b}\Delta b \tag{12}$$

dengan

$$\Delta a = a_{j+1} - a_j \qquad \text{dan} \qquad \Delta b = b_{j+1} - b_j$$

- Substitusi persamaan (12) pada persamaan (11), menghasilkan

$$y_i - f(x_i)_j = \frac{\partial f(x_i)_j}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f(x_i)}{\partial b} \Delta b + \epsilon_i$$

- Untuk $i = 1, \ldots, m$ maka

$$\begin{aligned}
y_1 - f(x_1) &= \frac{\partial f(x_1)}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f(x_1)}{\partial b} \Delta b + \epsilon_1 \\
y_2 - f(x_2) &= \frac{\partial f(x_2)}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f(x_2)}{\partial b} \Delta b + \epsilon_2 \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
y_m - f(x_m) &= \frac{\partial f(x_m)}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f(x_m)}{\partial b} \Delta b + \epsilon_m
\end{aligned}$$

- Dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ \vdots \\ y_m - f(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial b} \\ \frac{\partial f(x_2)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_2)}{\partial b} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_m)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_m)}{\partial b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a & \Delta b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_m \end{bmatrix}$$

- Selanjutnya gunakan teori regresi linier pada persamaan diatas, menghasilkan

$$\left(Z^T Z\right)(A) = Z^T D \tag{13}$$

dengan

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial b} \\ \frac{\partial f(x_2)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_2)}{\partial b} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(x_m)}{\partial a} & \frac{\partial f(x_m)}{\partial b} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \Delta a & \Delta b \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} y_1 - f(x_1) \\ y_2 - f(x_2) \\ \vdots \\ y_m - f(x_m) \end{bmatrix}$$

- Selesaikan persamaan 13 untuk A, dan hitung

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= a_j + \Delta a \\ b_{j+1} &= b_j + \Delta b \end{aligned}$$

- Ulang prosedur di atas sampai diperoleh solusi yang konvergen.

Contoh

- Gunakan model
$$f(x) = a\left(1 - e^{-bx}\right)$$
untuk mengaproksimasi data

x	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
y	0.28	0.57	0.68	0.74	0.79

- Gunakan $a_0 = 1$ dan $b_0 = 1$ sebagai nilai awal.