Modul Praktikum Analisis Numerik

(Versi Beta 1.2)

Mohammad Jamhuri

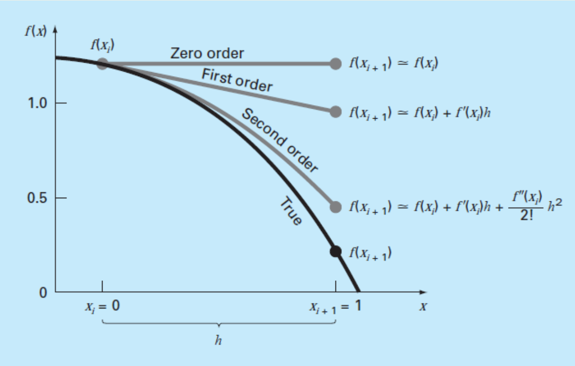
UIN Malang

December 2, 2013

- Hampiri persamaan berikut ini

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2 \tag{1}$$

  untuk $0 \leq x \leq 1$ menggunakan deret Taylor orde-0, orde-1, orde-2, orde-3, dan orde-4 dengan menggunakan nol sebagai basis bilangan.
- Buatlah program untuk mensimulasikan ekspansi persamaan (1) dengan deret Taylor diatas.
- Buatlah plot untuk persamaan (1) diatas beserta hasil ekspansi deret Taylornya sebagaimana berikut:



Hasil Praktikum 1: Tuliskan kode program anda (yang sudah benar) di sini

Kode Program:

Kode Program:

- Gunakan metode *bisection* untuk menentukan koefisien c pada persamaan berikut

$$\frac{667.38}{c}\left(1 - e^{-0.146843c}\right) = 40 \tag{2}$$

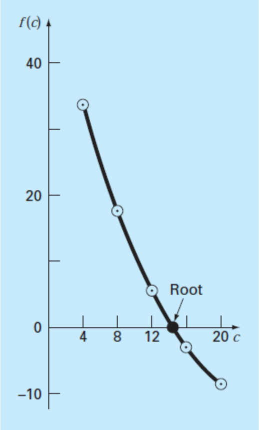
- Buatlah program untuk menampilkan plot persamaan (2) pada interval $0 \leq c \leq 20$ sebagai mana gambar di sisi kanan berikut.

Algoritma metode *bisection*

1. Pilih tebakan kiri x_a dan kanan x_b sedemikian hingga fungsi mengalami pererubahan tanda pada interval $[x_a, x_b]$ atau $f(x_a) f(x_b) < 0$.
2. Hitung akar pendekatan dari $f(x) = 0$ sebagai

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$$

3. Lakukan langkah-langkah berikut untuk menentukan pada interval manakah akar berikutnya berada:
   - Jika $f(x_a) f(x_c) < 0$, ganti $x_b = x_c$ dan kembali ke langkah 2.
   - Jika $f(x_a) f(x_c) > 0$, ganti $x_a = x_c$ dan kembali ke langkah 2.
   - Jika $f(x_a) f(x_c) = 0$, akar sama dengan x_c, hentikan perhitungan.



- Buatlah program dengan menggunakan algoritma bisection di atas untuk menentukan akar dari persamaan (2) beserta error yang dihasilkan.
- Desainlah output dari program yang Anda buat sedemikian hingga dapat menampilkan informasi-informasi yang diperlukan seperti pada gambar berikut:

Desain output program

Iteration	x_l	x_u	x_r	ε_a (%)	ε_t (%)
1	12	16	14		5.279
2	14	16	15	6.667	1.487
3	14	15	14.5	3.448	1.896
4	14.5	15	14.75	1.695	0.204
5	14.75	15	14.875	0.840	0.641
6	14.75	14.875	14.8125	0.422	0.219

Hasil Praktikum 2: Tuliskan kode program anda (yang sudah benar) di sini

Kode Program:

Kode Program:

- Metode Newton-Raphson untuk menentukan akar dari $f(x) = 0$ adalah

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

- Gunakan metode Newton-Raphson diatas untuk menentukan akar dari $e^{-x} - x = 0$, dengan nilai awal $x_0 = 0$.
- Desain output dari program anda seperti pada gambar berikut ini:

i	x_i	ε_t (%)
0	0	100
1	0.500000000	11.8
2	0.566311003	0.147
3	0.567143165	0.0000220
4	0.567143290	$< 10^{-8}$

Tuliskan kode program anda disini:

- Metode Newton-Raphson untuk penyelesaian sistem persamaan adalah

$$X_{i+1} = X_i - \left[F'\left(X_i\right)\right]^{-1} F\left(X_i\right) \qquad (3)$$

dengan

$$\begin{aligned} X &= \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T F \\ F &= \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right)^T \end{aligned}$$

dan

$$F'\left(X\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial f_n} \end{bmatrix}$$

- $\left[F'\left(X\right)\right]^{-1}$ adalah invers dari $F'\left(X\right)$.

- Selesaikan sistem persamaan berikut dengan menggunakan metode Newton seperti pada pers. (3) disamping.

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 10 \qquad (4) \\ y + 3xy^2 &= 57 \qquad (5) \end{aligned}$$

- Gunakan $x = 1.5$ dan $y = 3.5$ sebagai nilai awal.
- Hentikan iterasi jika

$$\left|f_1\left(x, y\right)\right| + \left|f_2\left(x, y\right)\right| \leq 10^{-5}$$

dengan

$$f_1\left(x, y\right) = x^2 + xy - 10$$

dan

$$f_2\left(x, y\right) = y + 3xy^2 - 57$$

Soal 1.

- Gunakan iterasi titik tetap untuk menentukan akar dari $e^{-x} - x = 0$ dengan nilai awal $x_0 = 0$.
- Desain output program anda sebagaimana berikut:

i	x_i	ε_a (%)	ε_t (%)
0	0		100.0
1	1.000000	100.0	76.3
2	0.367879	171.8	35.1
3	0.692201	46.9	22.1
4	0.500473	38.3	11.8
5	0.606244	17.4	6.89
6	0.545396	11.2	3.83
7	0.579612	5.90	2.20
8	0.560115	3.48	1.24
9	0.571143	1.93	0.705
10	0.564879	1.11	0.399

- ε_a di definisikan sebagai

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

- ε_t di definisikan sebagai

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{\textit{true value}} \times 100\%$$

dengan $E_t = \textit{true value} - \textit{approximation}$.

Soal 2.

- Gunakan iterasi titik tetap untuk menyelesaikan sistem persamaan (4) dan (5) diatas.
- Gunakan nilai awal $x = 1.5$ dan $y = 3.5$.
- Penjelasan mengenai metode iterasi titik tetap dapat di lihat di subbab 6.6 pada *textbook*.

Hasil praktikum 4

Kode Program (soal 1):

Kode Program (soal 2):

- Gunakan polinom derajat tiga (6) untuk mengaproksimasi fungsi y pada data berikut ini

x_i	y_i
0	2.1
1	7.7
2	13.6
3	27.2
4	40.9
5	61.1
Σ	152.6

- Gunakan kriteria jumlah kuadrat terkecil untuk menentukan parameter a, b, c dan d dari polinom

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2 + dx_i^3 + \epsilon_i \qquad (6)$$

dengan ϵ_i adalah error ke-i.

Tuliskan kode program anda disini:

- Gunakan

$$f(x) = a\left(1 - e^{-bx}\right)$$

untuk mengaproksimasi y pada data berikut

x	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
y	0.28	0.57	0.68	0.74	0.79

- Gunakan nilai awal untuk $a = 1$ dan $b = 1$.
- Lakukan iterasi sampai jumlah kuadrat errornya kurang dari 10^{-8}.
- Untuk penjelasan tentang regresi nonlinier dapat dilihat di subbab 17.5 pada *textbook*.

Tuliskan kode program anda disini:

- Turunan hampiran $f(x)$ terhadap x pada $x = x_i$ di definisikan sebagai

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \tag{7}$$

untuk beda maju, dan

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} \tag{8}$$

untuk beda pusat, dan

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}. \tag{9}$$

untuk beda mundur.

- Untuk turunan kedua $f(x)$ pada $x = x_i$ didefinisikan sebagai

$$f''(x) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{\Delta x^2} \tag{10}$$

untuk beda maju, dan

$$f''(x) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} \tag{11}$$

untuk beda pusat, dan untuk beda mundur didefinisikan sebagai

$$f''(x) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{\Delta x^2}. \tag{12}$$

- Buatlah plot dari fungsi

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7 \qquad \text{untuk} \quad -2 \le x \le 3 \tag{13}$$

dan hasilkan gambar sebagaimana gambar berikut

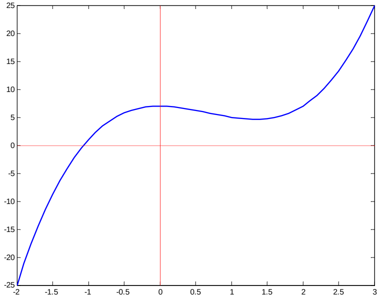


Figure: Plot dari (13)

- Hitung dan gambarkan gradien/garis singgung persamaan (13) pada $x = 2$. Gunakan metode beda maju, beda pusat dan beda mundur untuk mencari turunannya dan hasilkan gambar sebagaimana gambar-gambar berikut.

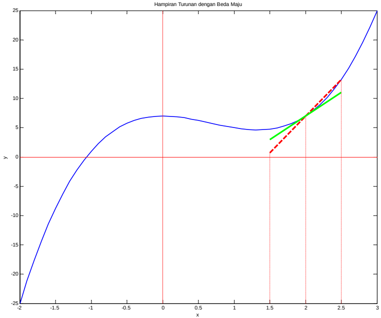


Figure: warna hijau (eksak) dan warna merah (hampiran)

- Hasil menggunakan beda pusat:

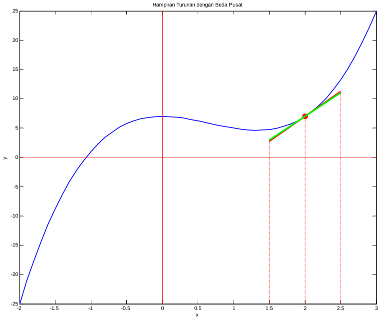


Figure: warna hijau (eksak) dan warna merah (hampiran)

- Hasil menggunakan beda pusat:

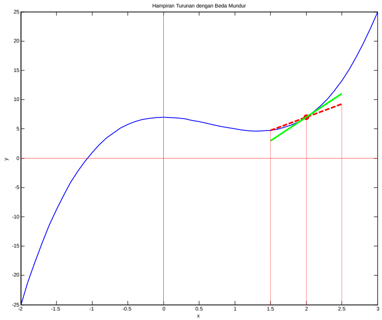


Figure: warna hijau (eksak) dan warna merah (hampiran)