Solusi Numerik PDP

(Metode Beda Hingga)

December 9, 2013

- Sebuah persamaan differensial apabila didiskritisasi dengan metode beda hingga akan menjadi sebuah persamaan beda.
- Jika persamaan differensial parsial mempunyai solusi eksak $u(x, t)$, maka persamaan beda akan mempunyai solusi hampiran $u\left(x_j, t_n\right)$.
- Kaitan antara pdp dengan persamaan beda, dan solusi $u(x, t)$ dan solusi hampiran $u\left(x_j, t_n\right)$ tak lain adalah konsep kekonsistenan, kestabilan dan kekonvergenan suatu persamaan beda, lihat gambar berikut:

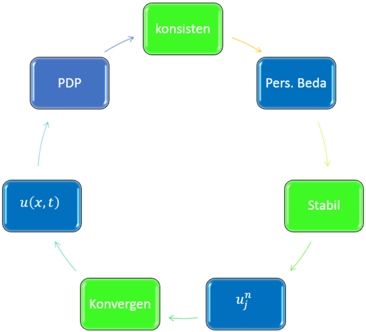

Figure: Skema hubungan antara pdp dan persamaan beda serta solusi-solusinya

- Sebagai langkah awal pengenalan metode beda hingga, akan digunakan pdp yang paling sederhana yaitu persamaan transport

$$u_t + du_x = 0, \qquad \text{untuk} \quad (0 \le x \le L, 0 \le t \le T) \tag{1}$$

  beserta syarat awalnya

$$u(x,0) = f(x), \qquad \text{untuk} \quad 0 \le x \le L \tag{2}$$

  yang telah kita ketahui mempunyai solusi eksak $u(x,t) = f(x - dt)$.
- Persamaan beda hingga dikatakan **stabil** jika persamaan beda menghasilkan solusi u_j^n yang berhingga.
- Persamaan beda dikatakan **konsisten** terhadap pdpnya jika selisih antara persamaan beda dengan pdpnya (suku-suku *truncation error*) menuju nol jika lebar grid menuju nol, yaitu $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$.
- Persamaan beda dikatakan **konvergen** jika solusi persamaan beda mendekati solusi pdpnya, untuk lebar grid menuju nol yakni $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$.

Teorema Equivalensi Lax

Untuk suatu masalah nilai awal yang *well-posed*, jika suatu persamaan beda konsisten dan stabil, maka persamaan beda tersebut pastilah konvergen.

Metode FTBS (*forward time backward space*)

- Perhatikan selang $[0, L]$ yang dipartisi dengan ukuran Δx dengan titik-titik partisi $x_j = (j-1)\,\Delta x$, untuk $j = 1, 2, \ldots, N_x$.
- Selang $[0, T]$ dipartisi dengan ukuran Δt dengan titik-titik partisi $t_n = (n-1)\,\Delta t$, untuk $n = 1, 2, \ldots, N_t$.
- Akan dicari $u\left(x_j, t_n\right)$ untuk $j = 1, 2, \ldots, N_x$, dan $n = 1, 2, \ldots, N_t$.
- Akan digunakan notasi $u_j^n = u\left(x_j, t_n\right)$. Sehingga persamaan beda untuk persamaan transport (1) adalah:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + d\,\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{3}$$

atau

$$u_j^{n+1} = (1 - C)\,u_j^n + C u_{j-1}^n \tag{4}$$

dengan $C = \frac{d\Delta t}{\Delta x}$.

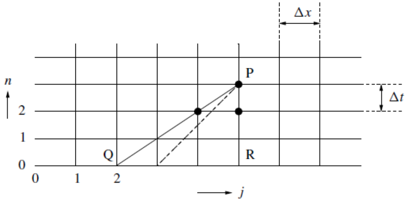

Figure: Stencil metode FTBS untuk persamaan transport

- Perhatikan domain perhitungan $[0, L] \times [0, T]$ yang telah di partisi. Syarat awal (2) telah diketahui sehinga u_j^1, untuk $j = 1, 2, \ldots, N_x$ telah diketahui.
- Untuk satu time-step berikutnya dengan (4) kita dapat menghitung u_j^2, untuk $j = 2, \ldots, N_x$, namun u_1^2 tak dapat dihitung.
- Ini berarti untuk pendekatan numerik ini kita membutuhkan syarat batas kiri, jika digunakan syarat batas kiri $u(0, t) = 0$ atau u_1^n untuk $n = 1, 2, \ldots, N_t$, maka FTBS dapat digunakan untuk menentukan u_j^n untuk setiap $j = 1, 2, \ldots, N_x$, $n = 1, 2, \ldots, N_t$.
- Perhatikan bahwa FTBS pada persamaan transport tidak membutuhkan syarat batas kanan.

Kestabilan

- Metode berikut ini disebut metode kestabilan von Neumann, substitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam (4).
- Kemudian bagi dengan u_j^n sehingga diperoleh

$$\rho = 1 - C\left(1 - e^{-ia}\right)$$

atau

$$\begin{aligned}
\rho &= 1 - C\left(1 - [\cos a - i \sin a]\right) \\
&= 1 - C\left(1 - \cos a + i \sin a\right) \\
&= 1 - C\left(1 - \cos a\right) - iC \sin a \\
&= 1 + C\left(\cos a - 1\right) - iC \sin a
\end{aligned}$$

- Persamaan beda stabil jika dan hanya jika $|\rho| < 1$ atau

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(1 + C\left(\cos a - 1\right)\right)^2 + \left(-C \sin a\right)^2} &\leq 1 \\
1 + 2C\left(\cos a - 1\right) + C^2\left(\cos^2 a - 2\cos a + 1\right) + C^2 \sin^2 a &\leq 1 \\
2C\left(\cos a - 1\right) + C^2\left(\cos^2 a + \sin^2 a\right) - 2C^2 \cos a + C^2 &\leq 0 \\
2C\left(\cos a - 1\right) + 2C^2 - 2C^2 \cos a &\leq 0 \\
2C\left(\cos a - 1\right) - 2C^2\left(\cos a - 1\right) &\leq 0 \\
\left(1 - C\right)\left(\cos a - 1\right) &\leq 0
\end{aligned}$$

- Karena $-2 \leq \cos a - 1 \leq 0$, maka ketaksamaan terakhir dipenuhi untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ jika dan hanya jika

$$-1 + C \quad \leq \quad 0$$

atau

$$C \leq 1$$

- Jadi syarat kestabilan metode FTBS adalah

$$0 \leq \frac{d\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Konsistensi:

- Perhatikan ekspansi Taylor dari u_j^{n+1} dan u_{j-1}^n masing-masing di sekitar u_j^n berikut.

$$u_j^{n+1} \quad = \quad u_j^n + \Delta t \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^n + \cdots \qquad (5)$$

$$u_{j-1}^n \quad = \quad u_j^n - \Delta x \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n + \frac{1}{2}\Delta x^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n + \cdots \qquad (6)$$

- Substitusikan (5) dan (6) pada persamaan beda (4), dan gunakan hubungan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-d\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -d\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = d^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

akan diperoleh *modified differential equation* sebagai berikut:

$$\left(\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^n + d\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_j^n\right) + \frac{1}{2}d\left(d\Delta t - \Delta x\right)\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n + \cdots = 0 \qquad (7)$$

- Suku pertama pada (7) tak lain adalah persamaan transport yang akan diselesaikan.
- Suku kedua dan seterusnya pada (7) tak lain adalah suku tambahan yang kita dapatkan saat kita bekerja dengan persamaan beda (4), dan disebut *truncation term*.

$$\textit{truncation term} = \frac{1}{2}d\left(d\Delta t - \Delta x\right)\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^n$$

- Perhatikan bahwa jika $\Delta t \to 0$ dan $\Delta x \to 0$, maka *truncation term* $\to 0$, jadi metode FTBS konsisten terhadap persamaan transport.
- Pengamatan lebih lanjut, saat kita bekerja dengan persamaan beda (4) sebenarnya kita bukan menyelesaikan persamaan transport (1) melainkan menyelesaikan modified differential equation (7).

- Suku kedua dari *truncation term* akan nol jika dan hanya jika $d\Delta t = \Delta x$ atau $(C = 1)$. Suku kedua dari truncation term adalah

$$\left(-\frac{1}{2}d^3\Delta t^3 + \frac{1}{2}d^2\Delta x\Delta t - \frac{1}{6}d\Delta x^3\right) u_{xxx}|_j^n$$

  dan akan bernilai nol jika $C = 1$.

- Ternyata hal ini juga berlaku untuk suku ketiga dan seterusnya pada truncation term, Jadi jika $C = 1$ persamaan beda (4) ekuivalen dengan (1). Dengan kata lain metode FTBS pada persamaan transport dengan $C = 1$ akan menghasilkan solusi eksak, dan uraian diatas adalah buktinya.

- Jika $C < 1$, maka suku pertama truncation term berupa suku difusi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, dan akan menimbulkan error numerik berupa damping.

Metode FTCS (*forward time central space*)

- Metode FTCS biasa disebut sebagai metode Richardson, akurasi metode ini $\mathcal{O}\left(\Delta t, \Delta x^2\right)$.
- Persamaan beda metode Richardson untuk persamaan transport adalah sebagai berikut:
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + d\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{8}$$
atau
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{d\Delta t}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \tag{9}$$

Kestabilan:

- Substitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam (9), kemudian dibagi dengan u_j^n, maka persamaan (9) menjadi:
$$\rho = 1 - \frac{d\Delta t}{2\Delta x}\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)$$
atau
$$\begin{aligned}\rho &= 1 - S\left(-2i \sin a\right)\\ &= 1 + i\left(2S \sin a\right)\end{aligned}$$
- Perhatikan bahwa syarat kestabilannya adalah $|\rho| < 1$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, sedangkan
$$|\rho| = \sqrt{1 + 4S^2 \sin^2 a}$$
selalu lebih besar dari 1, ini berarti metode FTCS/Richardson selalu tidak stabil.

- Lebih jauh dapat dibuktikan bahwa, suku pertama *truncation term* yang berorde-2: $\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$ akan bernilai nol jika dan hanya jika $C = 1$.
- Begitu juga dengan suku-suku truncation term berorde lebih tinggi, jika $C < 1$, suku berorde-2 tersebut akan menimbulkan efek difusi.
- Selain itu, suku-suku truncation term yang merupakan turunan orde genap akan memberikan efek error numerik berupa difusi atau damping, disipasi, sedangkan suku-suku yang merupakan turunan orde ganjil akan memberikan efek error numerik berupa efek dispersi.
- Terdapat sebuah aturan umum yang mengatakan bahwa approksimasi orde-1 bagi ∂_t akan menghasilkan error numerik berupa difusi sedangkan aproksimasi orde-2 bagi ∂_t akan menghasilkan error numerik berupa dispersi. Pada uraian selanjutnya akan dibahas metode beda hingga orde-2.