Persamaan Gelombang

M. Jamhuri

December 15, 2013

- Dawai direntang seperti pada gitar dan dipetik, maka dawai akan bergetar.
- Bagaimana getaran dawai tersebut?
- Untuk menjelaskan getaran tersebut, kita tinjau sepenggal dawai dan gaya yang bekerja pada kedua ujung, seperti diberikan sketsanya pada gambar berikut

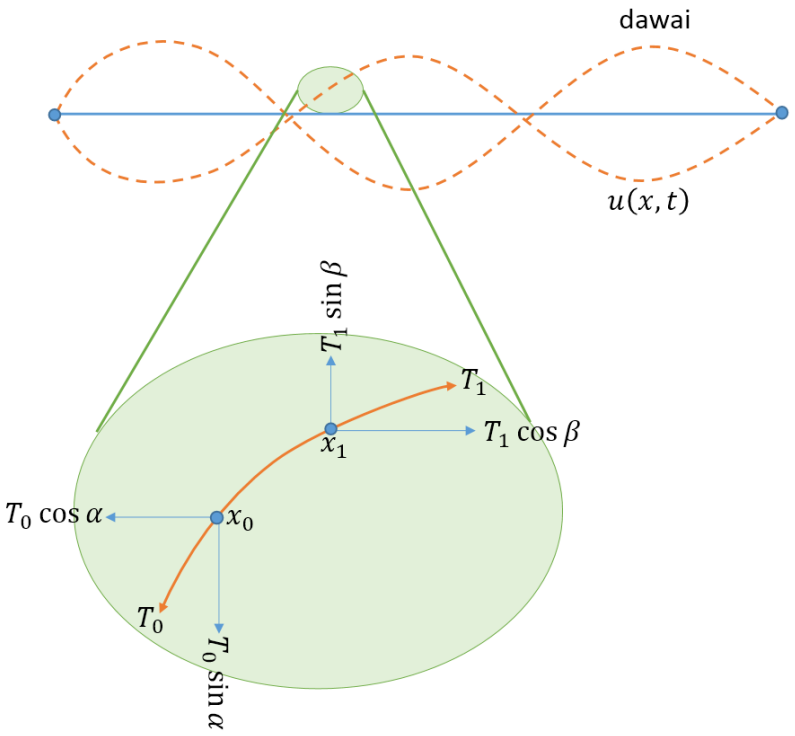

Figure: Sketsa getaran dawai dan gaya yang bekerja

- Misalnya pada ujung $x = x_0$ bekerja gaya tegang T_0 yang membentuk sudut α terhadap sumbu datar, dan pada ujung $x = x_1$ bekerja gaya T_1 yang membentuk sudut β.

- Untuk mengamati gerakan dawai, kita proyeksikan kedua gaya sepanjang sumbu datar dan sumbu tegak.
- Pada arah horizontal, kedua gaya saling meniadakan, karena dawai tidak mengalami gerakan ke arah ini, sehingga berlaku

$$T_0 \cos\alpha = T_1 \cos\beta$$

dan kemudian kita sebut T.

- Pada arah vertikal, bekerja hukum Newton

$$T_1 \sin\beta - T_0 \sin\alpha = \rho\left(x_1 - x_0\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ρ menyatakan rapat massa dawai dan u menyatakan simpangan dawai.

- Tiap suku kemudian dibagi dengan T, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{T_1 \sin\beta}{T_1 \cos\beta} - \frac{T_0 \sin\alpha}{T_0 \cos\alpha} &= \frac{\rho}{T}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
T_1 \tan\beta - T_0 \tan\alpha &= \frac{\rho}{T}\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_1} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_0}}{\Delta x} &= \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

- Dengan mengambil $\Delta t \to 0$ dan juga $T > 0$, kita dapat menggunakan notasi $c^2 = T/\rho$, sehingga simpangan dawai pada setiap posisi x dan saat t memenuhi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sebagai persamaan getaran dawai, atau lebih dikenal sebagai persamaan gelombang, gerakan naik turun dari dawai menimbulkan adanya perambatan gelombang pada dawai.

- Perhatikan persamaan gelombang

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho} \tag{1}$$

dengan syarat awal

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

- Terapkan beda pusat pada kedua sukunya menghasilkan persamaan beda dengan akurasi $\mathcal{O}\left(\Delta t^2, \Delta x^2\right)$ berikut

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \tag{3}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = S\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + 2(1-S)\,u_j^n - u_j^{n-1} \tag{4}$$

dengan $S = \dfrac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$.

- Perhatikan bahwa persamaan beda (4) memerlukan dua baris syarat awal, sementara permasalahan kita hanya mempunyai syarat awal (2), yang berarti u_j^0 untuk $j = 1, \ldots, N_x$.
- Bagaimana mendapatkan u_j^1? Perhatikan yang berikut, terapkan beda pusat dengan akurasi $\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)$ pada $u_t|_j^0$, yaitu

$$\frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\Delta t} = \psi_j. \tag{5}$$

- Persamaan (4) untuk $n = 0$ menghasilkan

$$u_j^1 = S\left(u_{j+1}^0 + u_{j-1}^0\right) + 2\left(1 - S\right)u_j^0 - u_j^{-1}$$

dan karena $-u_j^{-1} = 2\Delta t\psi_j - u_j^1$, maka diperoleh:

$$u_j^1 = \frac{S}{2}\left(\phi_{j+1}^0 + \phi_{j-1}^0\right) + \left(1 - S\right)\phi_j^0 + \Delta t\psi_j \tag{6}$$

- Jadi, persamaan beda (3) dapat diterapkan dengan

$$u_j^0 = \phi_j \tag{7}$$

dan (6) sebagai dua baris nilai awal.

- Substitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam (4) sehingga diperoleh

$$u_j^{n+1} = S\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + 2\left(1-S\right)u_j^n - u_j^{n-1}$$

$$\rho = S\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) + 2\left(1-S\right) - \rho^{-1}$$

atau

$$\rho^2 - \left[S\left(e^{ia} + e^{-ia}\right) + 2\left(1-S\right)\right]\rho + 1 = 0 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \rho^2 - \left[S\left(2\cos a\right) + 2\left(1-S\right)\right]\rho + 1 &= 0 \\ \rho^2 - \left(2S\cos a - 2S + 2\right)\rho + 1 &= 0 \end{aligned}$$

- Karena $e^{ia} = \cos a + i\sin a$ dan $e^{-ia} = \cos a - i\sin a$, maka menjadi

$$\rho^2 - 2\left\{S\left(\cos a - 1\right) + 1\right\}\rho + 1 = 0$$

dan

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} &= \frac{2\left[1 + S\left(\cos a - 1\right)\right]}{2} \pm \frac{\sqrt{4\left(1 + 2S\left(\cos a - 1\right) + S^2\left(\cos a - 1\right)^2\right) - 4}}{2} \\ &= 1 + S\left(\cos a - 1\right) \pm \sqrt{1 + 2S\left(\cos a - 1\right) + S^2\left(\cos a - 1\right)^2 - 1} \\ &= 1 + S\left(\cos a - 1\right) \pm \sqrt{2S\left(\cos a - 1\right) + S^2\left(\cos a - 1\right)^2} \end{aligned}$$

- Karena $-2 \leq \cos a - 1 \leq 0$ maka

$$1 - 2S \pm \sqrt{-4S + 4S^2} \leq \rho_{1,2} \leq 1$$

$$1 - 2S + 2\sqrt{-S + S^2} \leq \rho_1 \leq 1 \qquad \text{dan} \qquad 1 - 2S - 2\sqrt{-S + S^2} \leq \rho_2 \leq 1$$

supaya stabil, maka

$$\left|1 - 2S + 2\sqrt{-S + S^2}\right| \leq 1 \qquad \text{dan} \qquad \left|1 - 2S - 2\sqrt{-S + S^2}\right| \leq 1$$

- Dua buah syarat kestabilan diatas dapat digambarkan sebagai berikut

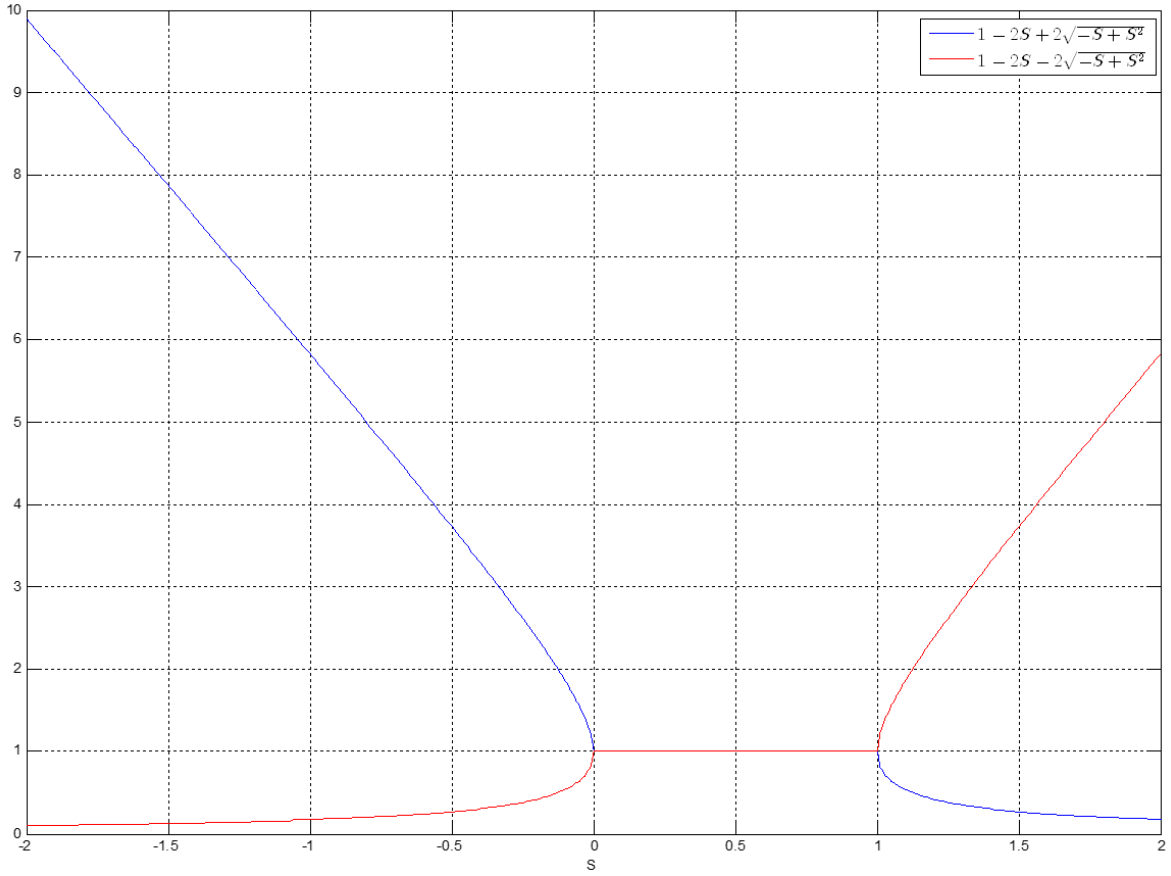

Figure: Syarat kestabilan untuk persamaan gelombang $u_{tt} = c^2 u$

- Jika kita amati gambar diatas, Untuk $S < 0$, $\left|1 - 2S \pm 2\sqrt{-S + S^2}\right| \geq 1$.
- Untuk $S > 1$, $\left|1 - 2S \pm 2\sqrt{-S + S^2}\right| \geq 1$, dan

$$\left|1 - 2S \pm 2\sqrt{-S + S^2}\right| \leq 1$$

  hanya dapat dipenuhi jika $0 \leq S \leq 1$.
- Sehingga syarat kestabilan untuk persamaan beda (4) adalah

$$\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1.$$