

Simulasi Persamaan Transport

December 15, 2013

(By: M. Jamhuri)

1. Implementasikan metoda upwind untuk persamaan $u_t + u_x = 0$ dengan syarat awal $u(x, 0) = \sin 8\pi x$. Gunakan $\Delta x = 2.5 \times 10^{-2}$ dan $\Delta t = 2 \times 10^{-2}$. Gambarkan solusi numerik bersama-sama dengan solusi eksaknya saat $t = 1$ dan hasilkan gambar 3.1.3. Perhatikan bahwa metoda upwind memuat error berupa damping.

Jawaban:

- Persamaan karakteristik dari $u_t + u_x = 0$ adalah $x - t = k$, sehingga solusi umumnya adalah $u(x, t) = f(x - t)$. Dari syarat awal yang diberikan, diperoleh hubungan

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{dan} \quad u(x, 0) = \sin 8\pi x$$

sehingga

$$f(x) = \sin 8\pi x, \quad \text{yang memberikan}$$

$$f(x - t) = \sin [8\pi (x - t)]$$

dan solusi khususnya adalah $u(x, t) = \sin 8\pi (x - t)$.

- **Metode upwind** pada persamaan transport $u_t + u_x = 0$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_j^{n+1} = (1 - C)u_j^n + Cu_{j-1}^n, \quad C = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

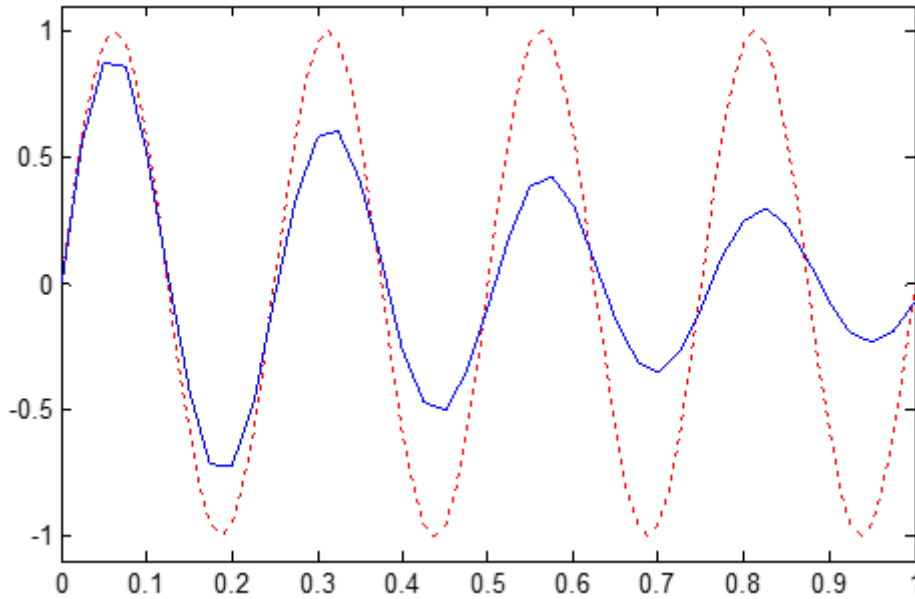


Figure 1: Solusi Numerik dan Solusi Eksak dari Metode Upwind saat $t = 1$

2. Perhatikan persamaan transport $u_t + bu_x = 0$, dengan b konstanta real sebarang yang tidak diketahui tandanya, dan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$. Perhatikan persamaan beda dengan akurasi orde satu berikut

$$\frac{1}{\Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n) = -\frac{b^+}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{b^-}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

dengan $b^+ = \max(b, 0)$ dan $b^- = \min(b, 0)$. Implementasikan persamaan beda di atas. Pilih sendiri syarat awal $f(x)$.

Jawaban:

Solusi umum dari persamaan transport diatas adalah $u(x, t) = f(x - bt)$. Jika kita ambil $f(x) = \text{sech}(x)$, maka diperoleh $u(x, t) = \text{sech}(x - bt)$ sebagai solusi khususnya.

Metode Numerik:

- (a) Untuk kasus $b > 0$ diperoleh $b^+ = b$ dan $b^- = 0$, sehingga persamaan beda diatas menjadi

$$\frac{1}{\Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n) = -\frac{b}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= -\frac{b\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \\ u_i^{n+1} &= -C (u_i^n - u_{i-1}^n) + u_i^n \end{aligned}$$

$$u_i^{n+1} = -Cu_i^n + Cu_{i-1}^n + u_i^n$$

atau

$$u_i^{n+1} = (1 - C) u_i^n + Cu_{i-1}^n, \quad \text{dengan} \quad C = \frac{b\Delta t}{\Delta x}$$

yang tak lain adalah metode upwind (FTBS) untuk persamaan transport. Pendekatan numerik metode upwind memerlukan syarat batas kiri, yaitu $u(0, t)$. Berikut ini diberikan hasil simulasi dengan memberikan batas kiri maupun dengan tidak diberi.

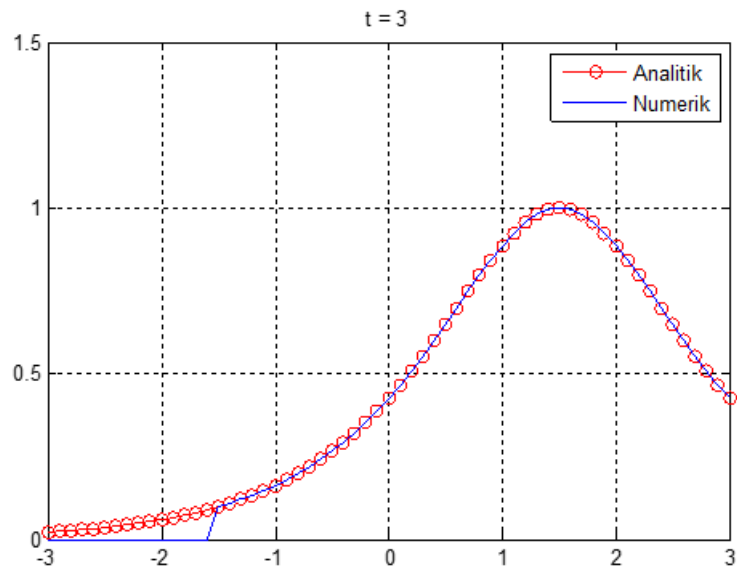


Figure 2: Hasil simulasi tanpa memberikan batas kiri

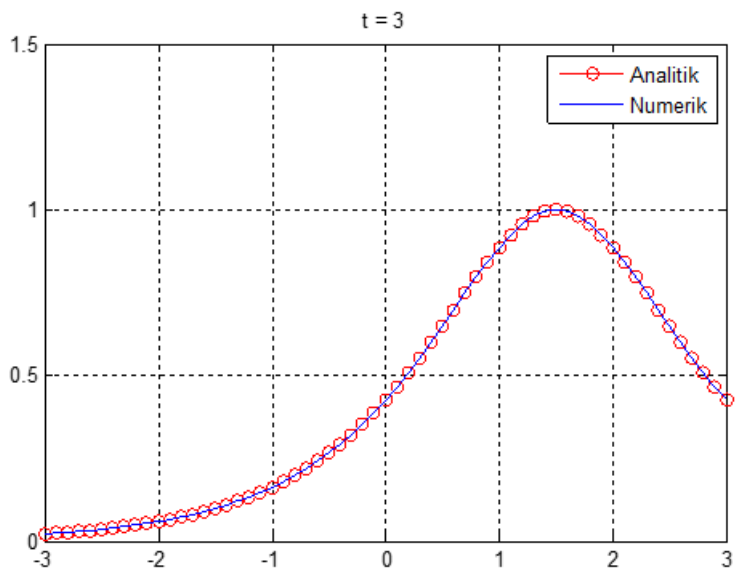


Figure 3: Hasil simulasi dengan memberikan batas kiri

(b) Untuk kasus $b < 0$ diperoleh $b^+ = 0$ dan $b^- = b$, sehingga persamaan beda diatas menjadi

$$\frac{1}{\Delta t} (u_i^{n+1} - u_i^n) = -\frac{b}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n &= -\frac{b\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) \\ u_i^{n+1} &= -C (u_{i+1}^n - u_i^n) + u_i^n \\ u_i^{n+1} &= -Cu_{i+1}^n + Cu_i^n + u_i^n \end{aligned}$$

atau

$$u_i^{n+1} = (1 + C) u_i^n - Cu_{i+1}^n, \quad \text{dengan} \quad C = \frac{b\Delta t}{\Delta x}$$

merupakan persamaan beda skema FTFS untuk persamaan transport.

Skema FTFS diatas memerlukan syarat batas numerik kiri $u(x_{\text{awal}}, t)$ dan kanan $u(x_{\text{akhir}}, t)$. Berikut ini diberikan 4 buah gambar hasil simulasi dengan memberikan syarat batas kiri kanan maupun tidak:

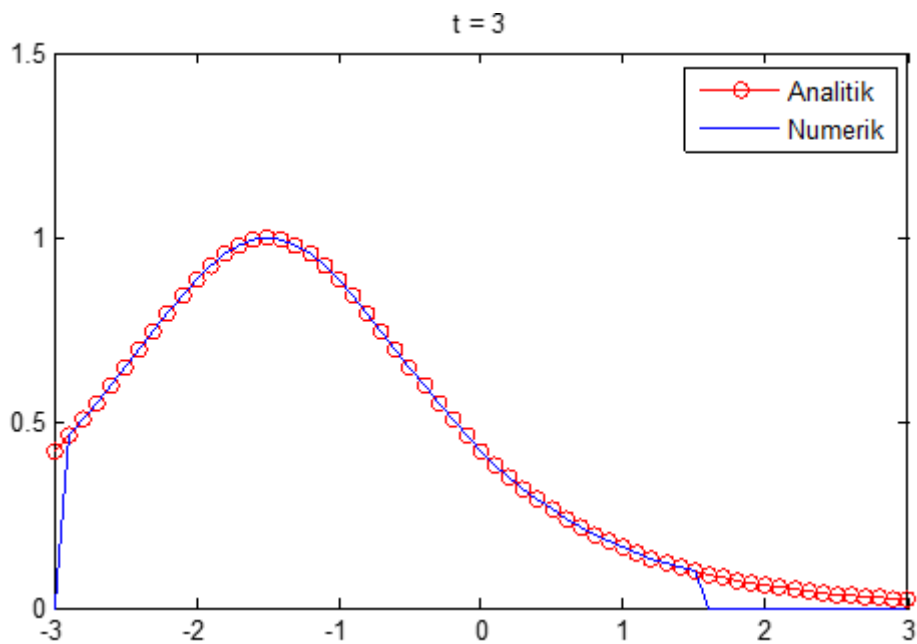


Figure 4: Hasil simulasi numerik **tanpa** memberikan **batas kiri** dan **batas kanan**

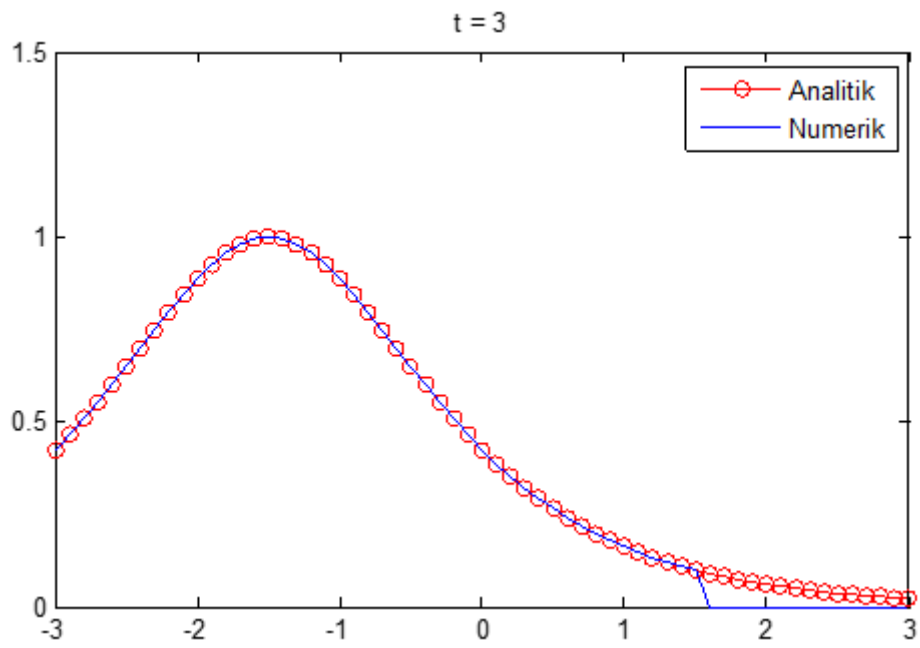


Figure 5: Hasil simulasi numerik dengan memberikan **batas kiri**

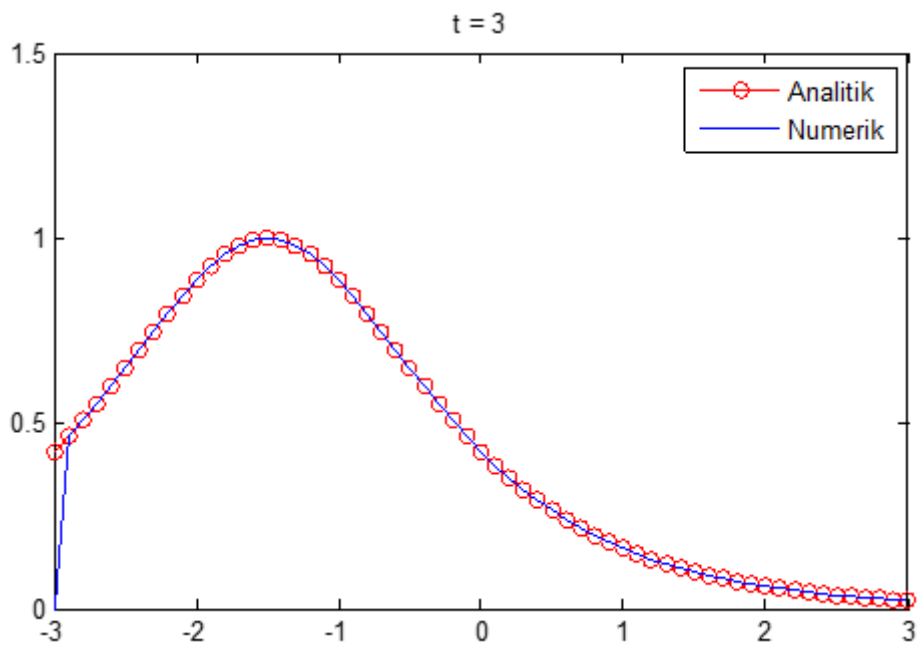


Figure 6: Hasil simulasi numerik dengan memberikan **batas Kanan**

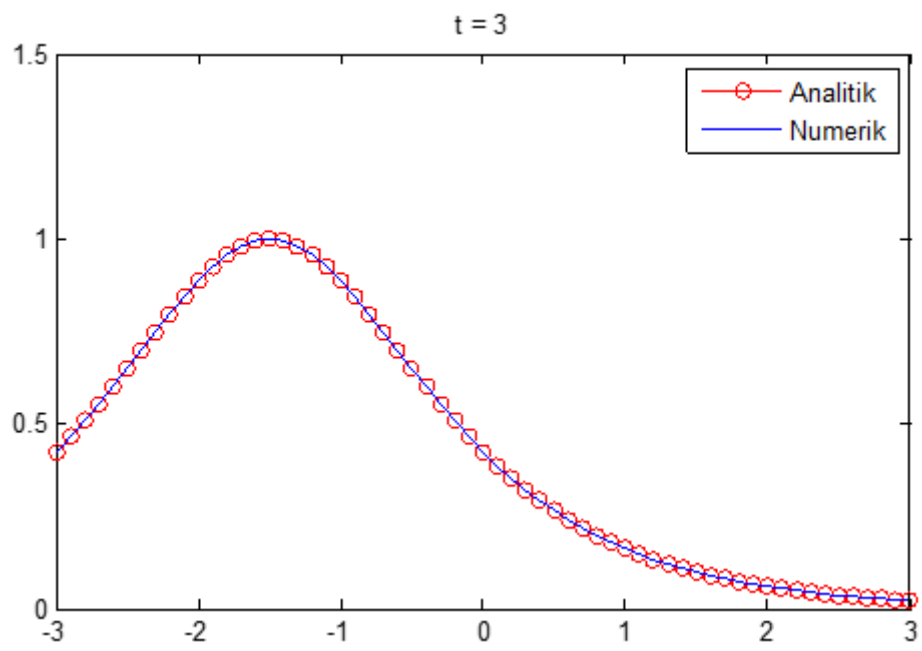


Figure 7: Hasil simulasi numerik dengan memberikan **batas kiri** dan **batas Kanan**